GOBIERNO DEL ESTADO DE VERACRUZ 2024 - 2030

SEV SECRETARÍA DE EDUCACIÓN DE VERACRUZ

SEMSyS SUBSECRETARÍA DE EDUCACIÓN MEDIA SUPERIOR Y SUPERIOR

TEBAEV Telebachillerato de Veracruz

Basado en la NEM

Pensamiento matemático I

Gonzalo Jácome Cortés

GOBIERNO DEL ESTADO DE VERACRUZ

Norma Rocío Nahle García
Gobernadora del Estado de Veracruz

Claudia Tello Espinosa
Secretaria de Educación de Veracruz

David Agustín Jiménez Rojas
Subsecretario de Educación Media Superior y Superior

Dirección General de Telebachillerato

Director General
Irving Ilhuicamina Mendoza Ruiz

Subdirectora Técnica
Piedad Alcira Hernández Pérez

Jefe del Departamento Técnico Pedagógico
Noel Abraham Velázquez Viveros

Jefa de la Oficina de Planeación Educativa
Ana Flora Angulo Morales

Equipo editorial

Coordinación editorial
Joaquin Vasquez Pérez

Asesoría académica
Carla Paola Barrales Flores

Asesoría pedagógica
Jessica Martínez Barreto

Corrección y estilo
Bertha Isabel Álvarez Vera

Diseño editorial
Greisy del Carmen Ramos de la Cruz

Formación
Óscar Méndez Huitrón

Portada
Edgardo Paredes Delgado

Selección de imágenes
Gonzalo Jácome Cortés

Pensamiento matemático I

Primera edición: 2024
Primera reimpresión: 2025
ISBN 978-607-725-499-7

Km 4.5 Carretera federal Xalapa-Veracruz
Col. SAHOP, C.P. 91090, Xalapa, Veracruz
Telebachillerato de Veracruz

Impreso en México

Módulo I
Toma de decisiones y probabilidad

Aprendizaje de trayectoria:

Valora la aplicación de procedimientos automáticos y de algoritmos para anticipar, encontrar y validar soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana).

Adapta procesos de razonamiento matemático que permiten relacionar información y obtener conclusiones de problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades, y de la vida cotidiana).

Modela y propone soluciones a problemas (matemáticos, de las ciencias naturales, experimentales y tecnología, sociales, humanidades y de la vida cotidiana) empleando lenguaje y técnicas matemáticas.

Explica la solución de problemas en el contexto que le dio origen, empleando lenguaje matemático y lo valora como relevante y cercano a su vida.

Progresiones de aprendizaje:

<table>
<tr><td rowspan="4">1</td><th colspan="3">Progresión</th></tr>
<tr><td colspan="3">Discute la importancia de la toma razonada de decisiones, tanto a nivel personal como colectivo, utilizando ejemplos reales o ficticios y de problemáticas complejas que sean significativas para valorar la recolección de datos, su organización y la aleatoriedad.
Se busca llevar al estudiantado a que aprecie el poder de la matemática y el pensamiento estadístico y probabilístico. En este punto no se espera que se resuelvan las problemáticas abordadas.</td></tr>
<tr><th>Metas</th><th>Categorías</th><th>Subcategorías</th></tr>
<tr><td>M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.</td><td>C2 Procesos de intuición y razonamiento.</td><td>S1 Capacidad para observar y conjeturar.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="4">2</td><th colspan="3">Progresión</th></tr>
<tr><td colspan="3">Identifica la incertidumbre como consecuencia de la variabilidad y a través de simulaciones considera la frecuencia con la que un evento aleatorio puede ocurrir con la finalidad de tener más información sobre la probabilidad de que dicho evento suceda.</td></tr>
<tr><th>Metas</th><th>Categorías</th><th>Subcategorías</th></tr>
<tr><td>M1 Observa y obtiene información de una situación o fenómeno para establecer estrategias o formas de visualización que ayuden a entenderlo.
M2 Desarrolla la percepción y la intuición para generar conjeturas ante situaciones que requieren explicación o interpretación.</td><td>C2 Procesos de intuición y razonamiento.</td><td>S1 Capacidad para observar y conjeturar.
S2 Pensamiento intuitivo.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td rowspan="6">3</td><th colspan="3">Progresión</th></tr>
<tr><td colspan="3">Identifica la equiprobabilidad como una hipótesis que, en caso de que se pueda asumir, facilita el estudio de la probabilidad y observa que cuando se incrementa el número de repeticiones de una simulación, la frecuencia del evento estudiado tiende a su probabilidad teórica.</td></tr>
<tr><th>Metas</th><th>Categorías</th><th>Subcategorías</th></tr>
<tr><td>M1 Ejecuta cálculos y algoritmos para resolver problemas matemáticos, de las ciencias y de su entorno.</td><td>C1 Procedural.</td><td>S1 Elementos aritmético-algebraicos.
S4 Manejo de datos e incertidumbre.</td></tr>
<tr><td>M1 Selecciona un modelo matemático por la pertinencia de sus variables y relaciones para explicar una situación, fenómeno o resolver un problema tanto teórico como de su contexto.</td><td>C3 Solución de problemas y modelación.</td><td>S1 Uso de modelos.</td></tr>
<tr><td>M1 Describe situaciones o fenómenos empleando rigurosamente el lenguaje matemático y el lenguaje natural.</td><td>C4 Interacción y lenguaje matemático.</td><td>S1 Registro escrito, simbólico, algebraico e iconográfico.
S2 Negociación de significados.
S3 Ambiente matemático de comunicación.</td></tr>
</table>

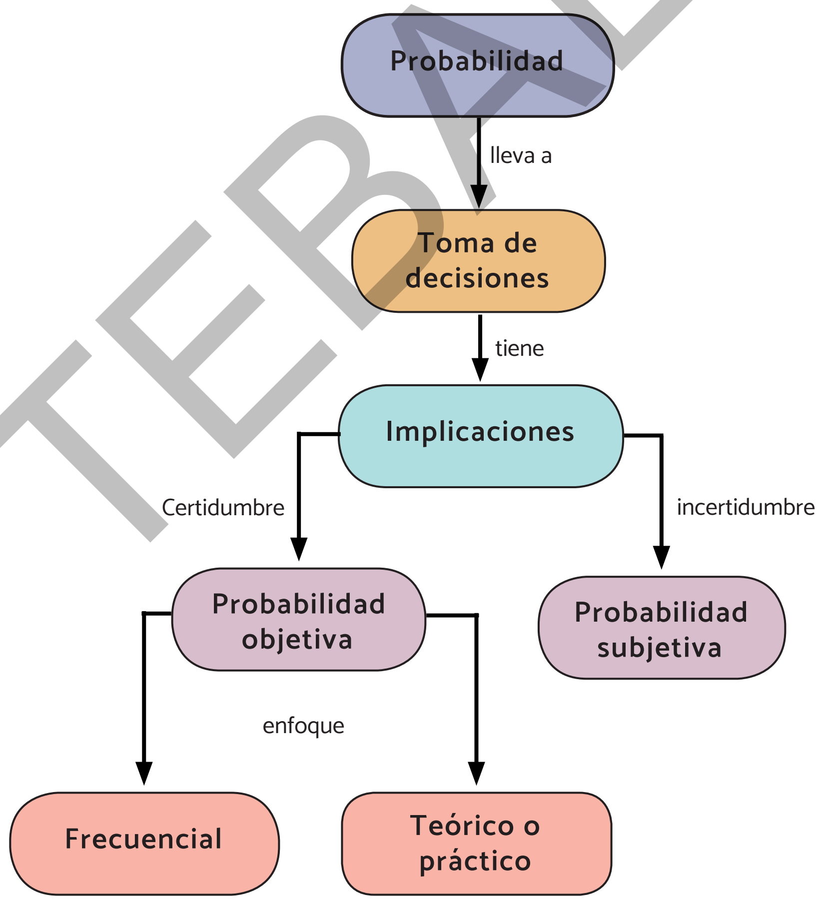
Introducción

Estimado estudiante. En este módulo nos enfocaremos en el estudio de la toma de decisiones y como ésta nos puede ayudar, de una manera objetiva, a solucionar situaciones que se nos presenten. Veremos la importancia de la recolección y organización de datos para obtener la posibilidad de que un determinado suceso ocurra.

También, identificaremos que la variabilidad forma parte de nuestra vida, y esto genera incertidumbre. Veremos la forma en cómo podemos trabajar con ella para tomar decisiones acertadas.

Por último, estudiaremos la probabilidad de que un determinado suceso ocurra y veremos los enfoques que le dan sustento. Todo esto con miras a observar y obtener información de una situación para obtener estrategias que ayuden a explicarla, desarrollando la percepción e intuición, apoyados en la resolución de problemas para dar significado de acuerdo al contexto.

Mapa conceptual



Exploro mis saberes

CONTESTA LO QUE SE TE SOLICITA.

1. ¿Qué entiendes por toma de decisiones?
2. ¿Cuál crees que es la estructura en toda toma de decisiones?
3. ¿Qué entiendes por probabilidad?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar un dado, obtengas un número mayor que 3 pero menor a 5?

Construye tu proyecto transversal

EL SIGUIENTE PROYECTO LO CONSTRUIRÁN DURANTE LOS RECESOS QUE TENGAN. LA INTENCIÓN ES RECABAR INFORMACIÓN Y CALCULAR PROBABILIDADES.

1. Todo el grupo se dividirá en dos equipos, cada equipo debe estar equilibrado entre hombres y mujeres.
2. En los recesos durante 10 minutos, jugarán equipo 1 contra equipo 2 un partido de basquetbol, fútbol, volibol, o el deporte de conjunto que más les agrade. Deberán llevar un registro de juegos ganados, empatados y perdidos.
3. Pasados unos días, en el momento que indique su profesor, contestarán las siguientes preguntas:
   a) ¿Cómo decidieron formar los equipos?
   b) ¿Fue difícil la decisión de elegir qué jugadoras y jugadores formaban cada equipo?
   c) ¿Cuántas veces jugaron en total?
   d) ¿Cuántas veces ganó el equipo 1?
   e) ¿Cuántas veces ganó el equipo 2?
   f) ¿Cuál es la probabilidad de que, el siguiente partido lo gane el equipo 1?
   g) ¿Y cuál es la probabilidad de que, el siguiente partido lo gane el equipo 2?
4. Presenten sus conclusiones al grupo.

Toma de decisiones

La toma de decisiones forma parte de nuestra vida cotidiana más de lo que comúnmente creemos, ya que va desde elegir la ruta que tomaremos para ir a la escuela, la ropa que utilizaremos para determinada ocasión o hasta decidir si nos vacunamos o no contra cierta enfermedad.

Toma en consideración

La toma de decisiones es el proceso mediante el cual se realiza una elección entre diversas alternativas disponibles.

Por ejemplo, hoy en día es muy común entre jóvenes el uso de las redes sociales, que son aplicaciones digitales conformadas por personas con intereses en común, creando entre la juventud diversos tipos de relaciones y permitiendo la comunicación, el intercambio de información e inclusive el esparcimiento. Las más populares actualmente son Facebook, Twitter, TikTok, Instagram, YouTube, entre otras.

Figura 1. Logotipos de algunas redes sociales

Sin embargo, te has dado cuenta de que, muchas de estas redes, cuando te recomiendan una película, sugieren una canción u ofrecen un producto, entre un universo de opciones muy distintas entre sí, pareciera que te están "leyendo la mente", al presentarte artículos (películas, canciones, productos) que te llaman poderosamente la atención y, por tanto, estarías dispuesto a comprar o consumir.

Esta información no ha sido elegida de forma aleatoria; aquí se utilizan muchas herramientas matemáticas, como el cálculo de probabilidades y el manejo estadístico de datos. Dichas aplicaciones cuentan con algoritmos que procesan una gran cantidad de datos individuales e interpretan la variabilidad de información para personalizar al máximo lo que te ofrecerán a ti y a cada uno de sus usuarios. Toda esta Inteligencia Artificial aplicada en las redes sociales tiene el objetivo, en lo general, de apoyar a la toma de decisiones, y en lo particular, permanezcan en las apps el mayor tiempo posible.

Figura 2. Esperanza de vida

Otro ejemplo sobre como las matemáticas nos apoyan a tomar decisiones es el cálculo del tiempo de vida de una persona. Es un misterio saber con exactitud el tiempo que nos queda por vivir, sin embargo, sí es posible predecir la esperanza de vida de los seres humanos.

La esperanza de vida muestra el promedio de años que le restan a las personas en una etapa de su existencia, en el supuesto que, en el futuro, no existan cambios variacionales (como siniestros, enfermedades, accidentes, etc.) que la modifiquen.

Por ejemplo, en un determinado país, las mujeres que acaban de cumplir 50 años vivirán un promedio de 20.3 años más; en ese mismo país, un varón recién nacido vivirá un promedio de 67.8 años. Queda claro que, si consideramos cualquier persona individualmente, ésta puede sobrepasar este valor o no llegar a él, es decir, habrá variabilidad entre las edades; sin embargo, en promedio, la esperanza de vida de las mujeres en ese país es de 70.3 años, mientras que la de los hombres es de 67.8 años.

Figura 3. Decidir tener buenos hábitos aumenta la esperanza de vida

Para calcular la esperanza de vida se requiere de analizar e interpretar diversas variables asociadas, como factores genéticos, ambientales, acceso a servicios sanitarios, agua potable, inclusive hábitos como la alimentación, el ejercicio, etc. Está comprobado que entre mejores hábitos se tengan, la esperanza de vida será mayor y, para tener buenos hábitos, es necesario tomar decisiones acertadas que ayuden a aumentar la calidad de vida.

Apliquemos lo aprendido 1

Escribe en tu libreta tres situaciones, de preferencia experiencias personales:

a) La primera donde quede de manifiesto una situación problemática cotidiana que te haya sucedido y que no fue muy complicada la toma de decisiones que utilizaste para resolverla.

b) La segunda donde se manifieste otra situación pero que la decisión que tomaste para resolver sea, desde tu óptica, de gran impacto y repercusión.

c) La tercera donde tomaron alguna decisión entre varios compañeros y menciona como llegaron a un acuerdo.

En estos ejemplos podemos apreciar la necesidad del ser humano de querer interpretar la variabilidad de información que se presenta en su entorno para utilizarla en algún momento de su existencia. Como te darás cuenta, la estadística, la probabilidad y en lo general, las matemáticas, influyen en la vida para la toma de decisiones, desde lo común y cotidiano hasta cuestiones relevantes y trascendentes, pero ¿cómo podemos, entre la gran cantidad de situaciones que se nos presentan, tomar "decisiones acertadas" y así, minimizar la incertidumbre que esto nos genera?

Implicaciones

Toda decisión que tomemos podemos catalogarla como acertada o errónea y, cualquiera que fuera ésta, nos generará un cierto grado de aprendizaje. Para poder tomar el camino de una acertada, conviene primero entender que existen diversos procesos en la toma de decisiones, los más comunes son:

- Racionales (elecciones lógicas y secuenciales, basadas en fuentes y pruebas comprobables).
- Intuitivos (elecciones basadas en la experiencia personal y su intuición).
- De rutina (elecciones estandarizadas en respuesta a problemas conocidos y periódicos).
- De emergencia (elecciones tomadas frente a una situación nueva y excepcional).
- Innovadores (elecciones basadas en el descubrimiento, identificación y diagnóstico de problemas inusuales, requiriendo soluciones creativas).

Independientemente del proceso que sigamos, toda toma de decisiones tiene una determinada estructura:

a) Iniciamos identificando la necesidad de resolver un problema;
b) Se analiza y pondera el problema;
c) Desarrollamos alternativas de solución;
d) Evaluamos dichas alternativas y;
e) Tomamos la decisión basada en dicha evaluación.

Ahora, las condiciones en las que se toman decisiones también se deben tener en cuenta. Estas son de certidumbre, de riesgo o de incertidumbre:

- La certidumbre es la condición en la que los tomadores de decisiones están plenamente informados sobre la situación o problema, las posibles soluciones son obvias y el resultado de cada decisión es claro (aquí, la variabilidad de los datos es prácticamente nula).
- El riesgo es la condición en la que las personas pueden definir un problema, especificar la probabilidad de algunos echos o eventos, identificar soluciones alternativas y evaluar la posibilidad de los posibles resultados (aquí la variabilidad de los datos existe, pero es cuantificable).
- La incertidumbre es la condición en la que un individuo no dispone de información necesaria para asignar probabilidades a los resultados de las diversas soluciones con las que se pueda encontrar (aquí, la variabilidad de los datos es muy difícil de cuantificar objetivamente).

Con esto podemos inferir que el tipo, la cantidad y la confiabilidad de la información que se disponga, influyen en el nivel de riesgo que se tiene al tomar una decisión. Si basamos la posibilidad de que ocurra un resultado específico con base en hechos y números concretos, estaremos apoyándonos en la probabilidad objetiva, pero si nuestra percepción, juicio y opinión personal influyen en la toma de decisiones, estaremos utilizando la probabilidad subjetiva.

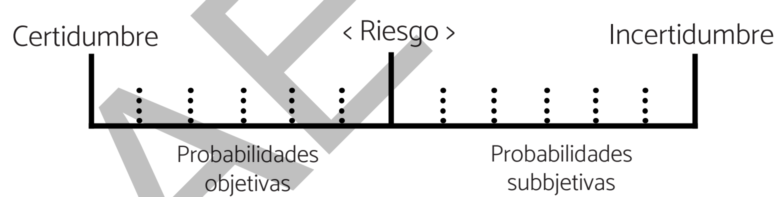


Figura 4. Condiciones al momento de tomar decisiones.

Sería ideal contar siempre con condiciones de certidumbre absoluta para toda decisión. Sin embargo, en la vida real, muy pocas decisiones se toman así, por lo que es necesario asumir ciertos riesgos al hacer una elección. Este riesgo resulta ser menor, si se fundamenta en procesos estadísticos y probabilísticos, (como la recolección de información, la clasificación y organización de datos, la visualización de evidencia, la cuantificación de la variabilidad, la asignación de posibilidades, etc.), por lo que, entre más objetivos seamos, contando en la medida de lo posible con información certera y suficiente, la probabilidad de acertar en nuestras decisiones será cada vez mayor.

Apliquemos lo aprendido 2

Realiza una infografía donde relaciones los conceptos presentados referente a la toma de decisiones.

Es por ello por lo que abordaremos el razonamiento probabilístico y estadístico con miras a responder la necesidad de tomar decisiones basadas en estudio de la variabilidad.

Toma en consideración

La variabilidad es la dispersión de los valores que los datos pueden arrojar, de manera que puedas emplear modelos para analizar y resolver situaciones, interpretar sus posibles soluciones y elaborar conclusiones basadas en el contexto presentado.

Variabilidad y nociones probabilísticas

Como ya lo hemos visto, en nuestra vida cotidiana nos enfrentamos a situaciones que involucran acciones propias de la casualidad, la variabilidad y la toma de decisiones, o ¿alguna vez no te ha sucedido que pronosticaron un día lluvioso, te vistes de acuerdo a la ocasión y resulta que ese día fue caluroso? o ¿tu equipo favorito, el cual va último de la liga, gana con el equipo que va en primer lugar? o ¿conoces que anuncian un medicamento experimental que sería eficaz contra una cierta enfermedad pero además, en la práctica, ayudó también a combatir otra que no estaba contemplada?

Es decir, en el mundo real encontramos variabilidad, riesgo y azar. Las situaciones son tan diversas y sus posibles resultados también, como el lanzamiento de un dado, hasta problemas específicos en campos como la medicina, la economía, las ciencias, etc. Estos escenarios implican la predicción de lo que sucederá en circunstancias donde se incluyen elementos conocidos y elementos aleatorios.

Toma en consideración

La palabra aleatorio proviene del latín *alea*, que significa suerte o azar.

Nociones de probabilidad

Existe una rama de las matemáticas encargada de estudiar la posibilidad de que un determinado evento ocurra. Dicha rama se le conoce como probabilidad. Así, para entrar en su estudio, es necesario conocer algunas nociones previas.

Experimento: Es cualquier acción u operación bien definida. Se divide en experimento determinista y experimento aleatorio.

Experimento determinista. Un experimento es determinista cuando, realizado en las mismas condiciones, se obtiene siempre el mismo resultado.Por ejemplo, al mezclar el color azul con el color amarillo, siempre obtendremos el color verde o soltar un objeto que se encuentra a una altura específica, éste siempre caerá. De esta forma, puede predecirse el resultado de un experimento determinista antes de que se realice.

Experimento aleatorio. Un experimento es aleatorio cuando, realizado en las mismas condiciones, no podemos conocer con exactitud el resultado, ya que éste depende del azar.

Por ejemplo, el extraer de una urna un número de entre diez posibles. En este caso no podemos saber con anticipación cuál será dicho número, pero podemos hacer una estimación de la probabilidad que tiene de salir elegido. Los experimentos aleatorios son el objeto de estudio de la teoría de probabilidades.

Espacio muestral. Es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento.

Se representa por la letra S o por la letra Ω. Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar un dado, los posibles resultados que se pueden obtener son 1, 2, 3, 4, 5 o 6 por lo que el espacio muestral de lanzar un dado es S ={1,2,3,4,5,6}.

Cardinalidad del espacio muestral. Es la cantidad de elementos que contiene el espacio muestral. Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar una moneda, el espacio muestral es S ={águila,sol} y su cardinalidad es 2, denotada por card(S) = 2 es decir el espacio muestral está formado por 2 elementos.

Elementos. Los elementos son cada uno de los resultados posibles de un experimento.

Así, si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire, los posibles resultados que podemos obtener son águila o sol. Cada uno de ellos es un elemento y en su conjunto, forman el espacio muestral.

Evento. Un evento o suceso, es un subconjunto del espacio muestral. Dicho evento puede estar formado por uno o varios elementos del espacio muestral.

Por ejemplo, si el experimento consiste en lanzar un dado, un evento A podría ser que salga en la cara superior el número 2, mientras que un evento B podría ser que salga en la cara superior un número impar.

Experimento: Lanzar un dado
Espacio muestral: S ={1,2,3,4,5,6}
Evento A: Salga en la cara superior el número 2: A ={2}
Evento B: Salga en la cara superior un número impar: B ={1,3,5}
Cardinalidad del espacio muestral: card (S) = 6
Cardinalidad del evento A: card (A) = 1
Cardinalidad del evento B: card (B) = 3

Como te puedes dar cuenta, al lanzar un dado es factible que el resultado sea un número 2. También es factible que el resultado sea un número impar. A este tipo de eventos se les denomina **eventos posibles**.

Existe otro tipo de evento, llamado **evento imposible**, el cual no cuenta con elementos y se le denota por el símbolo ∅ (conjunto vacío). Si continuamos con el experimento de lanzar un dado y si por alguna razón quisiéramos que el evento C sea que se obtenga un número mayor que 8, podrás notar que dicho evento no contendría ningún elemento, ya que el espacio muestral contiene números del 1 al 6 solamente.

Experimento: Lanzar un dado
Espacio muestral: S ={1,2,3,4,5,6}
Evento C: Salga en la cara superior un número mayor que 8: $C = \{\varnothing\}$

También hay otro tipo de evento, llamado evento seguro, que está formado por todos los posibles resultados del experimento. Continuando con el experimento de lanzar un dado, y nuestro evento D sea que se obtenga un número natural menor que 7, podrás notar que dicho evento contendrá a todos los elementos del espacio muestral.

Experimento: Lanzar un dado
Espacio muestral: S ={1,2,3,4,5,6}
Evento D: Salga en la cara superior un número natural menor que 7: D ={1,2,3,4,5,6}

Toma en consideración

Ten en cuenta que un evento imposible se denota por el símbolo ∅ (conjunto vacío) y no por el número 0 (cero). Por ejemplo, si un experimento consistiera en verificar el número de aciertos en una prueba de 5 reactivos tendríamos que el espacio muestral es S ={0,1,2,3,4,5}. Así el evento A "obtener ningún acierto" y el evento B "obtener 10 aciertos" son dos eventos distintos y se denotarían como A ={0} y $B = \{\varnothing\}$ respectivamente.

Estos eventos, al formar parte de un experimento aleatorio, son también eventos aleatorios. Un evento determinista es aquel resultado de un experimento determinista. Por ejemplo, si el experimento es "meter la mano en agua" y nuestro evento E es "la mano se mojará", el espacio muestral tendrá un único resultado o evento: la mano se mojará; este resultado es seguro. De esta forma, el evento es un evento determinista.

Apliquemos lo aprendido

3

Plantea un ejemplo de experimento determinista y otro de experimento aleatorio. A cada experimento asígnale un evento imposible, un evento posible y otro seguro.

Experimento determinista:
- Evento imposible=
- Evento posible=
- Evento seguro=

Experimento aleatorio:
- Evento imposible=
- Evento posible=
- Evento seguro=

La probabilidad tiene su base en los conceptos antes vistos. Ahora, existen varias formas de asignarla:

- Si lo que se quiere es trabajar con probabilidades objetivas para disminuir el riesgo y tomar mejores decisiones, los enfoques a utilizar son el frecuencial y el clásico.
- En caso de que no podamos utilizar la probabilidad objetiva, recurriríamos al enfoque subjetivo.

Probabilidad frecuencial

La probabilidad frecuencial cuantifica el grado de ocurrencia de un evento de **manera empírica** (*a posteriori*, es decir, después de que el experimento se realizó). De esta manera, permite predecir la posibilidad de ocurrencia de muchos fenómenos cotidianos por medio de la frecuencia de un evento observado. Es aplicable cuando el número de resultados de un experimento es infinito, no ha concluido o no son igualmente probables. Su probabilidad de ocurrencia es la razón entre la frecuencia de ocurrencia de dicho evento con el número de ensayos realizados.

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables al evento } A}{\text{Número de veces que se repitió el experimento}}$$

La ocurrencia de un evento A no puede ser cualquier número, sino debe de ser un número real P mayor o igual que cero, pero menor o igual que uno, $0 \leq P(A) \leq 1$. El cero indica la imposibilidad de ocurrencia del evento A y el uno indica la certidumbre de que ocurra.

Por ejemplo, en estos tiempos, es muy común la comparación entre quién es el mejor futbolista de la actualidad, si Lionel Messi o Cristiano Ronaldo. Para poder responder esta interrogante, especialistas han evaluado muchas variables como: juegos jugados, campeonatos obtenidos, goles anotados, asistencias etc., y, aún así, no han podido llegar a un consenso general. Esto se debe a que ambos son muy buenos atletas, pero también influye el gusto personal por el estilo de juego de uno u otro jugador. Sin embargo, si alguien nos pregunta que, entre ellos dos, quién es mejor cobrador de penales en su equipo y quien es mejor cobrador de penales en su selección, ¿podríamos darle alguna respuesta?


Figura 4. Cristiano Ronaldo y Lionel Messi.

Claro que sí. Primero recolectemos datos sobre los penales ejecutados por cada uno de ellos, cuántos fueron gol y cuántos no lo fueron y organicémoslos para poder visualizar la evidencia con la que contamos:

Penales de Lionel Messi *			
Equipo	Ejecutados	Anotados	Fallados
Barcelona	107	82	25
PSG	4	3	1
Total equipos	111	85	26
Selección			
Argentina	37	31	6

Penales de Cristiano Ronaldo *			
Equipo	Ejecutados	Anotados	Fallados
Manchester United	29	24	5
Real Madrid	94	80	14
Juventus	34	29	5
Al-Nassar	2	2	0
Total equipos	159	135	24
Selección			
Portugal	27	20	7

Con el sporting no ejecutó ningún penal
* Datos tomados al 22 de febrero de 2023

Efectividad al tirar penales en los equipos que ha jugado	
Lionel Messi	Cristiano Ronaldo
Experimento: Tirar un penal por Lionel Messi Espacio muestral: Representa el total de penales ejecutados por Lionel Messi en los equipos que ha jugado Evento A: Goles convertidos por penal en los equipos que ha jugado $P(A)=\dfrac{\textit{Número de casos favorables al evento A}}{\textit{Número de veces que se repitió el experimento}}$ $P(A)=\dfrac{85}{111}$ $P(A)=0.7658$ Así, la efectividad de Lionel Messi al tirar penales y anotar gol en los equipos que ha estado es del 76.58%.	Experimento: Tirar un penal por Cristiano Ronaldo Espacio muestral: Representa el total de penales ejecutados por Cristiano Ronaldo en los equipos que ha jugado Evento B: Goles convertidos por penal en los equipos que ha jugado $P(B)=\dfrac{\textit{Número de casos favorables al evento B}}{\textit{Número de veces que se repitió el experimento}}$ $P(B)=\dfrac{135}{159}$ $P(B)=0.8491$ Así, la efectividad de Cristiano Ronaldo al tirar penales y anotar gol en los equipos que ha estado es del 84.91%.
Efectividad al tirar penales en la selección de su país	
Lionel Messi	Cristiano Ronaldo
Experimento: Tirar un penal por Lionel Messi Espacio muestral: Representa el total de penales ejecutados por Lionel Messi en su selección Evento C: Goles convertidos por penal en su selección $P(C)=\dfrac{\textit{Número de casos favorables al evento C}}{\textit{Número de veces que se repitió el experimento}}$ $P(C)=\dfrac{31}{37}$ $P(C)=0.8378$ Así, la efectividad de Lionel Messi al tirar penales y anotar gol en su selección es del 83.78%.	Experimento: Tirar un penal por Cristiano Ronaldo Espacio muestral: Representa el total de penales ejecutados por Cristiano Ronaldo en su selección Evento D: Goles convertidos por penal en su selección $P(D)=\dfrac{\textit{Número de casos favorables al evento D}}{\textit{Número de veces que se repitió el experimento}}$ $P(D)=\dfrac{20}{27}$ $P(D)=0.7407$ Así, la efectividad de Cristiano Ronaldo al tirar penales y anotar gol en su selección es del 74.07%.

Para poder compararlos, resulta conveniente verificar la efectividad en la realización de los penales, es decir, cuántos penales fueron goles con respecto a los penales tirados.

En este ejemplo, utilizamos las **frecuencias relativas** de penales anotados entre penales ejecutados para poder llegar a la conclusión de que, entre Cristiano Ronaldo y Lionel Messi, hasta el 22 de febrero de 2023, Cristiano Ronaldo es mejor cobrador de penales en su equipo y que Lionel Messi es mejor cobrador de penales en su selección. Queda claro que, como son jugadores en activo al momento que se realizó el conteo, este es un evento no concluido, por lo que ellos pudieran seguir ejecutando penales posteriormente, con lo cual, la probabilidad obtenida pudiera también cambiar; sin embargo, entre más veces se haga el experimento, más precisa será la probabilidad.

Apliquemos lo aprendido

4

Contesta lo que se te solicita.
Covid 19 en México

El SARS-CoV2 es un virus que forma parte de la familia de virus "Coronavirus", que reciben su nombre por su forma en "corona". Es el más reciente de los coronavirus, identificado en el 2019 y causa la enfermedad llamada COVID-19, responsable de la actual pandemia.
La COVID-19 se puede transmitir al inhalar aire que contenga las gotitas de saliva que emiten personas enfermas al toser, estornudar o hablar o al tocarse los ojos, nariz o boca después de haber tocado superficies contaminadas.
La siguiente tabla muestra el número de personas que han sido contagiadas con la enfermedad de Covid-19 al 17 de marzo de 2023 y el número total de personas por estado.

Estado	Casos confirmados	Población	Proporción de casos confirmados en relación a la población
Aguascalientes	90,935	1,434,635	$\frac{90,935}{1,434,635} = 0.0634 = 6.34\%$
Baja California	176,272	3,634,868	
Baja California Sur	128,942	804,708	
Campeche	44,256	1,000,617	
Chiapas	57,661	5,730,367	
Chihuahua	172,894	3,801,487	
Ciudad de México	1,867,088	9,018,645	
Coahuila	187,633	3,218,720	
Colima	71,181	785,153	
Durango	81,645	1,868,996	
Estado de México	746,884	17,427,790	
Guanajuato	369,601	6,228,175	
Guerrero	119,163	3,657,048	
Hidalgo	127,936	3,086,414	
Jalisco	296,531	8,409,693	
Michoacán	116,510	4,825,401	
Morelos	99,994	2,044,058	
Nayarit	76,446	1,288,571	
Nuevo León	423,948	5,610,153	
Oaxaca	157,646	4,143,593	

PRIMER PARCIAL

Puebla	222,352	6,604,451	
Querétaro	186,130	2,279,637	
Quintana Roo	120,182	1,723,259	
San Luis Potosí	253,172	2,866,142	
Sinaloa	182,601	3,156,674	
Sonora	201,695	3,074,745	
Tabasco	221,493	2,572,287	
Tamaulipas	183,332	3,650,602	
Tlaxcala	60,834	1,380,011	
Veracruz	236,295	8,539,862	
Yucatán	143,018	2,259,098	
Zacatecas	83,473	1,666,426	
Total	7,507,743	127,792,286	

Fuente: Gobierno de México. Datos al 17 de marzo de 2023

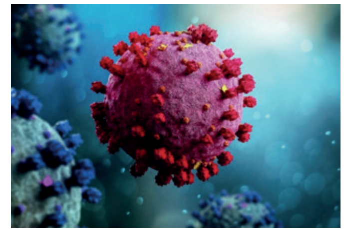


Figura 5. Coronavirus

a) Calcula la frecuencia relativa, entre los casos confirmados en relación con la población por cada estado.

b) En la tabla anterior, ¿qué significado tienen las columnas casos confirmados la (frecuencia absoluta) y casos conformados entre la población de cada Estado (frecuencia relativa)?

c) ¿Cuáles son los tres Estados de la República Mexicana que más casos de Covid-19 han presentado?

d) ¿Cuáles son los tres Estados de la República Mexicana donde más probabilidad existe de contagiarse de Covid-19?

e) ¿Coinciden los tres Estados de la República Mexicana que más casos tienen con los tres Estados de la República Mexicana donde más probabilidad de contagio hay?
¿A qué crees que se deba?

f) ¿Cuál es la probabilidad de que si elegimos una persona al azar que viva en el Estado de Veracruz, ésta haya tenido (o tenga) Covid-19?

g) ¿Cuál es la probabilidad de que si elegimos una persona al azar que viva en la República Mexicana, ésta haya tenido (o tenga) Covid-19?

Contesta lo que se te solicita.

a) Utiliza una moneda, lánzala 10 veces y registra los resultados obtenidos:

Registro de lanzamiento de una moneda		
Cara de la moneda	Sol	Águila
Frecuencia		

Total de lanzamientos: 10

b) De acuerdo con los resultados de tu tabla, calcula la probabilidad de obtener un sol.

$$P(Sol)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ obtener\ sol}{Número\ de\ veces\ que\ se\ repitió\ el\ experimento}$$

$$P(Sol)=\frac{\quad}{10}$$

$$P(Sol)=$$

c) ¿La probabilidad que obtuviste es igual que la de tus compañeros de clase? ________, ¿a qué crees que se deba? _________ ______________________.

d) Ahora, realiza otros 50 lanzamientos y súmalos con los 10 anteriores.

Registro de lanzamiento de una moneda		
Cara de la moneda	Sol	Águila
Frecuencia		

e) De acuerdo con los resultados de tu nueva tabla, calcula la probabilidad de obtener un sol.

$$P(Sol)=\frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ obtener\ sol}{Número\ de\ veces\ que\ se\ repitió\ el\ experimento}$$

$$P(Sol)=\frac{\quad}{60}$$

$$P(Sol)=$$

f) ¿La probabilidad que obtuviste de obtener sol cuando lanzaste 10 veces la moneda (inciso b) es la misma probabilidad que obtuviste para obtener sol cuando lanzaste la moneda 60 veces (inciso e)? ____________ ¿a qué crees que se deba? _______ ____________________________________ ¿Tus probabilidades son iguales que las que obtuvieron tus compañeros de clase? ________, ¿a qué crees que se deba? ____.

g) ¿Cuál crees que sea la probabilidad de obtener sol sí lanzamos la moneda mil veces? ____________ y si la lanzáramos un millón de veces, ¿cuál crees que sea dicha probabilidad? __________________________________.

Podríamos deducir que, si el experimento se repite infinitas de veces, el valor obtenido de la probabilidad frecuencial tenderá al valor teórico de dicha probabilidad.

Probabilidad teórica y subjetiva

Probabilidad clásica

La probabilidad clásica, también llamada probabilidad teórica, cuantifica el grado de ocurrencia de un evento de **manera deductiva** (*a priori*, es decir, antes de que el experimento se realice). Relaciona el número de casos favorables con el número de casos posibles. Si se realiza un experimento aleatorio en el que hay *n* elementos igualmente probables, y si A es un evento asociado a dicho experimento, entonces la probabilidad de que ocurra el evento A esta dada por:

$$P(A)=\frac{\textit{Número de casos favorables al evento A}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

Al igual que en la probabilidad frecuencial, en la probabilidad teórica, la ocurrencia de un evento A no puede ser cualquier número, sino debe de ser un número real P mayor o igual que cero, pero menor o igual que uno, $0 \le P(A) \le 1$. El cero indica la imposibilidad de ocurrencia del evento A y el uno indica la certidumbre de que ocurra.

Si un experimento consiste en lanzar un dado, que el evento A sea obtener en la cara superior el número 2 y el evento B sacar en la cara superior un número impar, la probabilidad de que el evento A ocurra es $\frac{1}{6}$, ya que existe solo un caso favorable al evento entre 6 posibles, mientras que la probabilidad de ocurrencia del evento B es $\frac{1}{2}$, (que se simplifica a $\frac{1}{2}$ ya que existen 3 casos favorables entre 6 posibles.

Experimento: Lanzar un dado

Espacio muestral: $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

Evento A: Salga en la cara superior el número 2: $A=\{2\}$

$$P(A)=\frac{\textit{Número de casos favorables al evento A}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

$$P(A)=\frac{1}{6}$$

Que de acuerdo con el contexto sería $P(2)=\frac{1}{6}$.

Evento B: Salga en la cara superior un número impar: $B=\{1,3,5\}$

$$P(B)=\frac{\textit{Número de casos favorables al evento B}}{\textit{Número de casos posibles}}$$

$$P(B)=\frac{3}{6}$$

$$P(B)=\frac{1}{2}$$

De acuerdo con el contexto sería $P(impar)=\frac{1}{2}$.

Ejemplo

1. Al lanzar una moneda, ¿cuál es la probabilidad de que caiga en la cara superior sol?

Definamos primero el experimento, el espacio muestral y el evento solicitado, para posteriormente asignar la probabilidad requerida.

Experimento: Lanzar una moneda

Espacio muestral: $S = \{águila, sol\}$

Evento A: Salga en la cara superior sol: $A = \{sol\}$

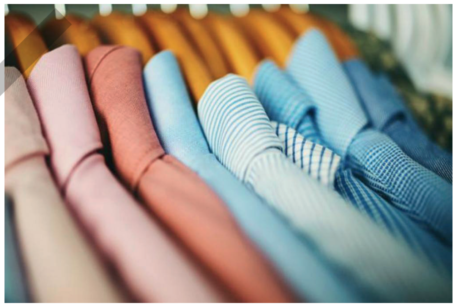
$$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ A}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(A) = \frac{1}{2}$$

O también podemos denotarlo por $P(sol) = \frac{1}{2}$

Por lo tanto, la probabilidad de que al lanzar una moneda se obtenga sol es de $\frac{1}{2}$

2. Se tiene en un armario 30 camisas, 5 son rojas, 7 amarillas, 8 moradas, 4 color naranja y el resto son verdes. Calcula la probabilidad de que, si extraemos al azar una camisa del armario, ésta sea de un color primario.



Para resolver cualquier problema, es necesario primero definir el experimento, encontrar el espacio muestral y entender el evento solicitado.

Experimento: Extraer una camisa de un armario y observar su color

Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento,

Si cada camisa es representada por la inicial de su color

$$S = \{r,r,r,r,r,a,a,a,a,a,a,a,m,m,m,m,m,m,m,m,n,n,n,n,v,v,v,v,v,v\}$$

Evento A: Extraer una camisa de color primario. Los colores primarios son el rojo, el amarillo y el azul. En el espacio muestral hay 5 camisas color rojo, 7 color amarillo y ninguna camisa color azul.

$$A = \{r,r,r,r,r,a,a,a,a,a,a,a\}$$

$$P(A) = \frac{Número\ de\ casos\ favorables\ al\ evento\ A}{Número\ de\ casos\ posibles}$$

$$P(A) = \frac{12}{30}$$

$$P(A) = \frac{2}{5}$$

O denotado también por $P(color\ primario) = \frac{2}{5}$

Por lo tanto, la probabilidad de que al extraer una camisa del armario se obtenga una de color primario es de $\frac{2}{5}$.

Apliquemos lo aprendido 5

Responde lo que se te solicita y desarrolla el procedimiento en el lugar indicado..

1) En una caja se tienen canicas de colores. 3 de ellas son verdes, 5 son rojas, 4 azules y 8 negras. Si extraemos una canica al azar, cuál sería la probabilidad de que esta canica sea de color:

   a) Verde
   b) Negra
   c) Roja o Azul
   d) Blanca

2. La maestra de un Telebachillerato, tiene en su salón de clases a 22 mujeres y 18 hombres. Si elige al azar un estudiante, ¿cuál es la probabilidad de que éste sea mujer? ¿y cuál es la probabilidad de que dicho estudiante sea hombre?

Probabilidad subjetiva

En ocasiones, se quiere saber la posibilidad de ocurrencia de un determinado evento al realizar un experimento, sin embargo, al no contar con información disponible, certera o fidedigna, no es posible asignarle una probabilidad objetiva. Para ello, recurrimos a la probabilidad subjetiva. La probabilidad subjetiva se basa en el grado de creencia sobre la posibilidad de que un evento ocurra, por lo que la asignación de dicha probabilidad depende de la experiencia, opinión o intuición que se tenga de dicho evento.

Por ejemplo, en un día nublado, una persona puede decir que está 100% segura que lloverá al atardecer, otra podría comentar que, aunque está nublado, está segura de que no lloverá, mientras otra podría decir que cree un 65% que sí lloverá.

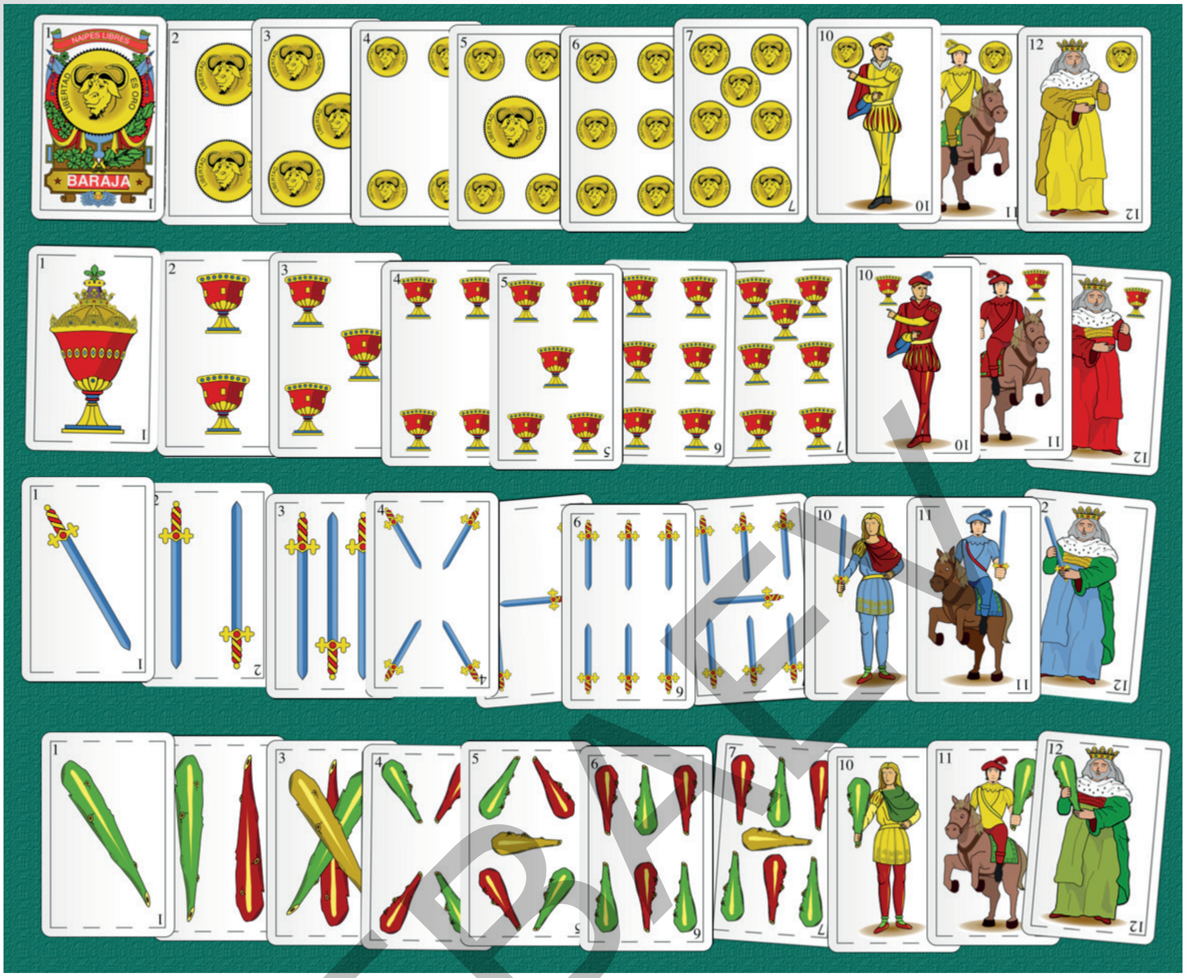
Apliquemos lo aprendido 6

Contesta correctamente los siguientes cuestionamientos.

1. La siguiente imagen corresponde a una baraja española.

Encuentra la probabilidad de extraer:

   a) Una carta que presente alguna espada
   b) Una carta con un as (es la marcada con el número 1)
   c) Una carta que tenga color verde
   d) Una carta que tenga impresa un animal
   e) Una con una figura humana



2. Utiliza un dado, lánzalo 100 veces y registra en la siguiente tabla los resultados obtenidos:

Registro de lanzamiento de un dado						
Cara del dado	1	2	3	4	5	6
Frecuencia						

De acuerdo con los resultados de tu tabla, calcula la probabilidad de obtener en el siguiente lanzamiento:

a) Un 2

b) Un 5

c) Un 8

d) Un número par

e) Un número mayor o igual a 4

3. ¿Cuál crees que es la probabilidad de que, en el primer parcial de esta asignatura, obtengas un 10 de calificación?

a) ¿de que obtengas un 8?

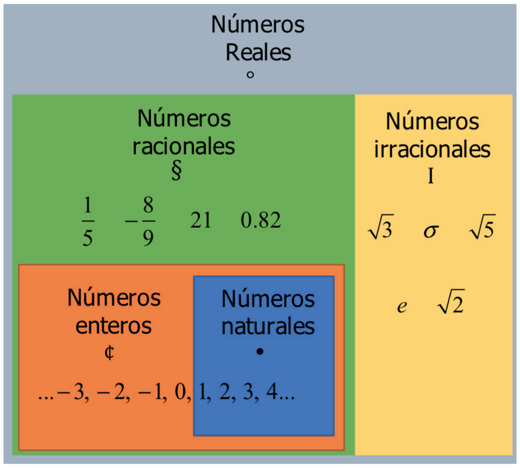
b) ¿de obtener al menos un 6 de calificación?

c) ¿Por qué lo crees así?

Es momento de realizar tu proyecto transversal.

Es momento de realizar los incisos c) y d) de tu proyecto transversal. A trabajar.

Aprendizajes de trayectoria: Números reales, proporciones, porcentajes y fracciones



FRACCIONES, DECIMALES Y PORCENTAJES

FRACCIONES

CLASIFICACIÓN

-Propia: a<b= $\frac{a}{b} = \frac{5}{7}$

-Impropia: a>b = $\frac{b}{a} = \frac{6}{4}$

- Mixta: $5\frac{1}{3}$

-Equivalentes: $\frac{2}{3} = \frac{6}{9}$

OPERACIONES

Multiplicación: $(\frac{a}{b})\,(\frac{c}{d}) = \frac{ac}{bd}$

División: $(\frac{a}{b}) \div (\frac{c}{d}) = \frac{ad}{bc}$

Suma o resta: $\frac{c}{a} \pm \frac{c}{a} = \frac{ad+bc}{bd}$

m. c. m (mínimo común múltiplo)

DECIMALES

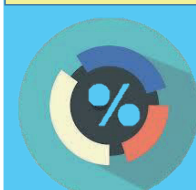
Es el resultado de 1 cociente o fracción

-Finitos o exactos: Número limitado de cifras
Ej: 0.273

-Periódicos: Infinitas cifras decimales que se repiten de manera periódica
Ej: 0.333, 0.1717, 0.35474747

-No Periódicos: Infinitas cifras decimales pero sin un patrón definido
Ej: √7= 2.645751

PORCENTAJES



-Fracción con denominador 100
-Se convierte a decimal quitando el símbolo % y dividiendo entre 100, sabemos que el punto se mueve 2 lugares a la izquierda
Ej: a) 8% = $\frac{8}{100}$ = 0.08 b) 2.47% = $\frac{2.47}{100}$ = 0.0247

PRIMER PARCIAL

Verifica tus metas de aprendizaje

Responde correctamente lo que se te solicita.

1. ¿Qué es la toma de decisiones?

2. ¿Cuáles son los procesos más comunes en la toma de decisiones?

3. ¿Cuál es la estructura en toda toma de decisiones?

4. Explica brevemente las condiciones en la que una persona puede tomar una decisión.

5. ¿Qué es la probabilidad?

6. Si un experimento consiste en colocar en una urna diez pelotas numeradas del 0 al 9, Calcula la probabilidad de, al extraer al azar una pelota, esté marcada con el número:

   a) El número 4

   b) Un número par

   c) Un número mayor que 2 pero menor o igual a 7

   d) El número 0

   e) El número 10

7. En un albergue de animales hay 25 perros, 13 gatos, 5 guacamayas, 2 pericos y 1 pez. Si elige al azar un animal para mascota:

   a) ¿Cuál es la probabilidad de que éste sea un perro?

   b) ¿Cuál es la probabilidad de que éste sea un pez?

   c) ¿Cuál es la probabilidad de que éste sea un ave?

   d) ¿Cuál es la probabilidad de que éste sea un reptil?